XVI Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Решение задачи 1

1. Рассмотрим фрагменты шифртекста ***эй*** и ***эйщ***; это — слова из 2 и 3 букв. Одно из слов имеет суффикс ***йээ***. Весьма вероятно, что ***э*** заменяет букву ***н***, а ***й*** — однау из гласных: ***о***, ***а***, ***и***, ***е***. Тогда возможны следующие варианты окончания слова ***юбюрйээпо***: ***онная***, ***онные***, ***енные***, ***енная***, ***инная***, ***инные***. Вариант окончания ***ные*** не подходит, так как при этом ***п*** заменяет ***ы***, и с буквы ***ы*** начинается слово ***пфзшэюь***. Поэтому ***п*** заменяет либо ***а,*** либо ***о***.
2. Можно попытаться угадать слово ***бвпвл***. Очевидно, что в нем ***в*** — согласная. Сочетание вида *хох*, где *х* — согласная, вряд ли возможно. Из вариантов *хах*, где *х* — согласная, подходит, разве что ***тат***. Проверим гипотезу, что ***в*** заменяет ***т***.
3. Заметим, что окончания четырёх слов — ***овл***, ***швл***, ***пвл***, ***швл*** образуют рифму. С учётом шага 2, "напрашиваются" варианты окончаний ***ать, ить***, ***ять***.
4. Буква ***ю*** часто встречается в шифртексте. Поэтому, скорее всего, она заменяет гласную букву. Она входит во фрагмент ***..юбб..*** Так как буква ***н*** уже занята, удвоение ***бб*** скорее всего, заменяет ***сс***, и ***юбб*** — это ***асс***, ***осс, есс*** или ***исс***. Возвращаясь к шагу 2, устанавливаем, что ***бвпвл*** заменяет ***стать***.
5. Учитывая шаг 4, а также то, что заглавной буквой начинается имя собственное, попытаемся угадать что заменяет сочетание ***Фюббшн***. "Напрашивается" вариант ***Россия*** или ***Россию***, откуда находим, что ***ю*** заменяет ***о,*** а ***ш*** заменяет ***и***.
6. Первое слово шифртекста — ***Гьюь***. Ясно, что ***ь*** заменяет согласную букву. Возможны следующие варианты из 4 букв: ***удод***, ***скок***, ***умом***. Отсюда получаем первое предложение: ***Умом Россию не понять***. Дальше легко догадаться. Ответ:

Умом Россию не понять,
Аршином общим не измерить:
У ней особенная стать —
В Россию можно только верить.

Решение задачи 2

Заметим, что 2007=223·9. Поэтому, используя данное устройство, можно было бы легко найти среднее арифметическое не 2006, а 2007 чисел. Действительно, обозначим эти 2007 чисел через $a_1,\ldots,a_{2007}$, а их среднее арифметическое — через A_{2007}. Разобьем их на 9 групп по 223 числа в каждой: первая группа: $a_1,\ldots,a_{223}$, вторая группа: $a_{224},\ldots,a_{446}$, ..., девятая группа: $a_{1785},\ldots,a_{2007}$. Для каждой из 9 групп найдем среднее арифметическое, входящих в нее чисел. Затем вычислим среднее арифметическое найденных девяти средних арифметических. Это и будет среднее арифметическое 2007 чисел, поскольку

$$A_{2007}=(a_1+\ldots+a_{2007}):2007=((a_1+\ldots+a_{223}):9+$$
$$+(a_{224}+\ldots+a_{447}):9+\ldots+(a_{1785}+\ldots+a_{2007}):9):223$$

Итак, среднее арифметическое **любых** 2007 чисел мы находить умеем. Покажем теперь, как найти среднее арифметическое A_{2006} от 2006 чисел $\boldsymbol{a_1,\ldots,a_{2006}}$. Добавим к этим числам ещё одно число a_{2007}, равное нулю, и вычислим среднее арифметическое A_{2007} теперь уже 2007 чисел. Воспользовавшись тем, что мы можем (дополнительно) выполнить одно умножение и одно деление, находим

$$A_{2006}=A_{2007}\cdot 2007:2006\ ,$$

так как

$$A_{2006}=(a_1+\ldots+a_{2006}):2006=$$
$$(a_1+\ldots+a_{2006}+a_{2007}):2006=$$
$$(a_1+\ldots+a_{2006}+a_{2007}):2007\cdot 2007:2006=$$
$$=A_{2007}\cdot 2007:2006.$$

Задача решена.

Отметим в заключение, что если разбить данные числа на несколько групп, найти среднее арифметическое каждой группы и затем взять среднее арифметическое полученных значений, то результат, вообще говоря, не будет совпадать со средним арифметическим исходных чисел и вот простой пример:

$$\frac{1+2+3+4+5}{5}\neq\frac{\frac{1+2}{2}+\frac{3+4+5}{3}}{2}\quad .$$

Тем не менее, таким способом среднее арифметическое вычислять можно, если разбивать исходные числа на группы, состоящие из одинакового количества чисел.

Решение задачи 3

Указанный в задаче способ зашифрования обладает следующим свойством. Если ***ab*** заменяется на ***cd***, то ***dc*** заменяется парой ***ba***. Проверим наличие этого свойства в данных в условии открытом и зашифрованных текстах. Для первого шифртекста первая же пара **cr** заменяется на **pa**, а **ap** переходит в **rc.** Пара **to** заменяется на **gl,** а **lg** переходит в **ot**:

c r y p t o g r a p h i c a l g o r i t h m

p a b d g l i u r c a v t h o t u e a d s p

В рассмотренных заменах противоречащий с указанным свойством мы не находим.

Для второго шифртекста это свойство не выполняется. Действительно, пара **lg** заменяется на **mh,** но при этом **hm** переходит в **in:**

c r y p t o g r a p h I c a l g o r i t h m

d s z q u p h s b q i j d b m h p s j u i n

Таким образом, первый шифртекст является единственным возможным вариантом.

Ответ: первый текст.

Решение задачи 4

Представим последовательность $\{x_n\}$ в виде последовательности пар (x_1,x_2), $(x_3,x_4),\ldots,$ которая имеет вид (a_1,b_1), (a_2,b_2), …. Ее период равен c=НОК(16,2006)=16048, так как равенство пар означает равенство их первых и равенство их вторых элементов. Поэтому, при всех натуральных n верно равенство $x_n=x_{n+2c}$. Покажем, что $2c$ – наименьшее число с таким условием. Пусть период последовательности $\{x_n\}$ равен t. Тогда число $2c$ должно делиться на t. Если t чётно ($t=2k$), то из верных при всех натуральных m равенств

$$x_{2m-1+t} = x_{2m-1}, \quad x_{2m+t} = x_{2m}$$

следуют равенства

$$a_{m+k} = a_m, \; b_{m+k} = b_m.$$

Таким образом, k делится на наименьшее общее кратное периодов исходных последовательностей. Отсюда

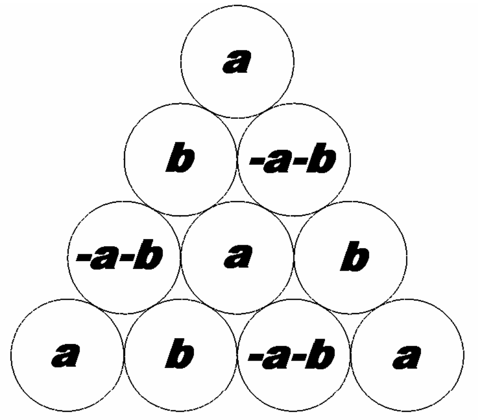
$$t = 2\text{НОК}(16,2006) = 32096.$$

При нечётном t первая последовательность является «сдвигом» второй, что противоречит различию длин их периодов.

Ответ: 32096

Решение задачи 5

Рассмотрим фрагмент исходной фигуры, которая представляет собой правильный треугольник, со стороной из четырех шаров. Пусть на верхнем шаре написано число a, а на одном из примыкающих к нему снизу шаров – число b. Из условия задачи следует, что сумма чисел на любых трёх попарно касающихся шарах равна нулю. Поэтому числа на остальных шарах выражаются через a и b как показано на рисунке. В вершинах фрагмента стоит число a, следовательно a=0. Совершенно аналогично (при рассмотрении правильного треугольника, со стороной из пяти шаров) доказывается, что b = 0.



Ответ: на всех шарах написано число 0.

Решение задачи 6

Ответ: Единственно возможное заполнение таблицы:

		30 \	24 \		8 \	19 \	
	\ 16	7	9	22 \ 3	1	2	
	5 \ 35	6	8	5	7	9	17 \
\ 25	1	8	7	9	26 \ 9	1	8
\ 13	4	9	11 \ 20	1	3	7	9
	16 \	5 \ 17	1	7	9	17 \	8 \
\ 21	9	4	8	\ 24	8	9	7
\ 10	7	1	2	\ 15	6	8	1